



TITLE:

# Minkowski空間の極大曲面とde Sitter空間のCMC-1曲面 (調和写像論の深化と展望)

AUTHOR(S):

山田, 光太郎

---

CITATION:

山田, 光太郎. Minkowski空間の極大曲面とde Sitter空間のCMC-1曲面 (調和写像論の深化と展望). 数理解析研究所講究録 2010, 1720: 174-181

ISSUE DATE:

2010-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170401>

RIGHT:

# Minkowski 空間の極大曲面と de Sitter 空間の CMC-1 曲面

山田光太郎\*

正の定曲率 Lorentz 空間形である 3 次元 de Sitter 空間内の平均曲率 1 の空間的曲面で完備なものは全体的なものしかないことが知られているが、特異点を許すならば、多くの例があり、興味深い研究対象である。このような曲面は、局所的には Minkowski 空間の極大曲面と等長的であり、小林・Weierstrass 表現公式の類似が知られている。このような曲面の基本性質と例を紹介する。

## 1 極大曲面と CMC-1 曲面

### 1.1 極小曲面と極大曲面

リーマン面  $M$  から  $\mathbf{C}^3$  への正則はめ込み  $F = (F_1, F_2, F_3): M \rightarrow \mathbf{C}^3$  が等方的 (null) であるとは、 $(F_1')^2 + (F_2')^2 + (F_3')^2 = 0$  が  $M$  上で成り立つことである。ここで  $'$  は  $M$  の複素座標に関する微分を表す。

いま、 $\mathbf{C}^3$  から  $\mathbf{R}^3$  への射影  $\pi_E: (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Re} z_3)$  を考えると、正則な等方的はめ込み  $F: M \rightarrow \mathbf{C}^3$  に対して  $f_E := \pi_E \circ F: M \rightarrow \mathbf{R}^3$  はリーマン面  $M$  の、3 次元ユークリッド空間  $E^3 = (\mathbf{R}^3, (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2)$  への共形的な極小はめ込みを与える。逆に、共形極小はめ込み  $f: M \rightarrow E^3$  が与えられれば、 $M$  の不変被覆  $\widetilde{M}$  からの  $\mathbf{C}^3$  への正則な等方的はめ込み  $F$  が存在して  $f = \pi_E \circ F$  と表される。

一方、別の射影

$$\pi_L: \mathbf{C}^3 \ni (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\operatorname{Im} z_3, \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2) \in \mathbf{R}^3$$

を考えると、正則等方的はめ込み  $F: M \rightarrow \mathbf{C}^3$  に対して  $f_L = \pi_L \circ F$  は  $f_L$  がはめ込みを与えるような点で、3 次元 Minkowski 空間

$$L^3 = (\mathbf{R}^3 = \{(x_0, x_1, x_2); x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}, \langle \cdot, \cdot \rangle = -(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2)$$

の空間的な極大曲面 (平均曲率が 0 であるような曲面) を与える (小林-Weierstrass 表現公式 [9, 10])。さきに述べたユークリッド空間の場合、 $F$  がはめ込みである限り  $f_E = \pi_E \circ F$  もはめ込みとなるが、 $f_L$  ははめ込みであるとは限らない。一般に、なめらかな写像  $f: M \rightarrow L^3$  に対して、 $M$  の普遍被覆  $\widetilde{M}$  上で定義された正則な等方的はめ込み  $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{C}^3$  が存在して  $f = \pi_L \circ F$  となるとき (特異点をもつ) 曲面  $f$  を極大面 (maxface) とよぶ [16]<sup>\*1</sup>。Minkowski 空間の完備な極大曲面は平面に限ることが知られている ([3]) が、特異

\*東京工業大学大学院理工学研究科; kotaro@math.titech.ac.jp

研究会「調和写像論の深化と展望」2010 年 6 月 2 日～4 日、京都大学数理解析研究所

藤森祥一, Wayne Rossman, 梅原雅顕, Seong-Deog Yang 各氏との共同研究 [6, 7] に基づく。

<sup>\*1</sup> [16] では別の定義を与えているが、それはここでの定義と同値である。

点を許すと多くの例が知られており、豊かな幾何学的な対象であることがわかる ([9, 10, 16, 8, 7]). とくに極大面に対しては、小林-Weierstrass 表現公式を用いることができ、さまざまな大域的な性質が知られてきている.

## 1.2 双曲空間と de Sitter 空間の CMC-1 曲面

3次元ユークリッド空間の極小曲面  $f: M \rightarrow E^3$  の第一基本形式 (誘導計量) と第二基本形式をそれぞれ  $ds^2, II$  と書くと,  $M$  の普遍被覆  $\widetilde{M}$  の, 定曲率  $-1$  の 3次元双曲空間  $H^3 = H^3(-1)$  へのはめ込み  $\hat{f}: \widetilde{M} \rightarrow H^3$  で, 第一基本形式と第二基本形式がそれぞれ  $ds^2, II + ds^2$  となるものが存在する (いわゆる Lawson 対応). とくに  $\hat{f}$  の平均曲率は 1 となる. 以下, 平均曲率が 1 の曲面のことを “CMC-1 曲面” とよぶことにする.

ユークリッド空間の極小曲面に対して Weierstrass 表現公式が知られているように, 双曲空間の CMC-1 曲面に対して, 複素解析的なデータで曲面を表す公式がある ([2, 15]): 3次元双曲空間  $H^3$  を

$$H^3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathrm{SU}(2) = \{aa^*; a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\} \quad (a^* = {}^t\bar{a})$$

と表示し,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  からの射影を

$$\pi_H: \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \ni X \mapsto XX^* \in H^3$$

と表しておく. いま, リーマン面  $M$  の正則はめ込み  $F: M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  は  $\det(F') = 0$  であるとき等方的 (null) であるとよばれる. ただし ' は  $M$  の複素座標による微分を表す. すると, 正則な等方的はめ込み  $F: M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  に対して  $f_H := \pi_H \circ F: M \rightarrow H^3$  は共形的な CMC-1 はめ込みを与える. 逆に, 任意の共形的な CMC-1 はめ込み  $f: M \rightarrow H^3$  に対して,  $M$  の普遍被覆上  $\widetilde{M}$  の正則な等方的はめ込み  $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  が存在して,  $f = \pi_H \circ F$  と表される. この  $F$  のことを CMC-1 曲面  $f$  の正則持ち上げとよぶ.

一方, 3次元 de Sitter 空間, すなわち単連結かつ完備な 3次元 Lorentz 空間形で断面曲率が 1 となるものを  $S_1^3$  と書くと,

$$S_1^3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathrm{SU}(1, 1) = \{ae_3a^*; a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる. すると, 射影

$$(1.1) \quad \pi_S: \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \ni X \mapsto Xe_3X^* \in S_1^3$$

による正則な等方的はめ込み  $F$  の像  $f_S = \pi_S \circ F$  は, それがはめ込みである点では平均曲率 1 の空間的曲面を与えている. ここで, 極大面の定義の類似として, 局所的に正則な等方的はめ込み  $F$  の射影で表されるようなリーマン面  $M$  から  $S_1^3$  への写像のことを CMC-1 面 (CMC-1 face),  $F$  をその正則持ち上げとよぶ ([4, 6]). 双曲空間の CMC-1 曲面の場合と同様に,  $S_1^3$  の CMC-1 面と Minkowski 空間の極大面の間には, 局所等長的な対応がある.

## 2 ガウス写像

正則な等方的はめ込み  $F = (F_{ij}): M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  に対して

$$(2.1) \quad G := \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{12}}{dF_{22}}, \quad g := -\frac{dF_{12}}{dF_{11}} = -\frac{dF_{22}}{dF_{21}}$$

で定まる有理型関数を, それぞれ  $F$  の双曲的ガウス写像, 第二ガウス写像とよぶ. これらの幾何学的な意味を紹介しよう:

■双曲空間の CMC-1 曲面の場合 双曲空間  $H^3$  の曲面をはめ込み  $f: M \rightarrow H^3$  で表し, その単位法線ベクトルを  $\nu$  とする. このとき,  $p \in M$  に対して  $p$  を速度  $\nu(p)$  で出発する  $H^3$  の測地線  $\gamma_{\nu(p)}$  の漸近類  $[\gamma_{\nu(p)}]$  は  $H^3$  の理想境界  $\partial H^3$  の点を与える. 理想境界  $\partial H^3$  をリーマン球面  $C \cup \{\infty\}$  と同一視することにより得られる写像

$$(2.2) \quad M \ni p \mapsto [\gamma_{\nu(p)}] \in C \cup \{\infty\}$$

をはめ込み  $f$  の双曲的ガウス写像という. とくに  $f$  が CMC-1 はめ込みを与えているとき, その正則持ち上げ  $F$  から (2.1) のようにあたえられる  $G$  は (2.2) の双曲的ガウス写像と一致する.

一方, 全臍的でない CMC-1 はめ込み  $f: M \rightarrow H^3$  の誘導計量を  $ds^2$ , ガウス曲率を  $K$  とおき,  $d\sigma^2 := (-K)ds^2$  とすると, これは臍点以外の点で定曲率 1 の計量を与え, 臍点で  $ds^2$  は退化する. とくに  $M$  の普遍被覆  $\widetilde{M}$  上で定義された正則写像  $g: \widetilde{M} \rightarrow C \cup \{\infty\} = S^2$  で,  $g$  による  $S^2$  の標準計量の引き戻しが  $d\sigma^2$  に一致するものが存在する:

$$(2.3) \quad d\sigma^2 = \frac{4 dg d\bar{g}}{(1 + |g|^2)^2}.$$

この  $g$  は,  $f$  の正則持ち上げ  $F$  に対して (2.1) で定義された第二ガウス写像と一致する. そこで  $F$  の第二ガウス写像をまた  $f$  の第二ガウス写像とよぶ.

■de Sitter 空間の CMC-1 面の場合 双曲空間の場合と同様に, CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  の正則持ち上げの双曲的ガウス写像, および第二ガウス写像をそれぞれ  $f$  の双曲的ガウス写像, 第二ガウス写像とよぶ. これらの幾何学的意味は次のように与えられる: de Sitter 空間  $S_1^3$  の向き付けられた時間的測地線の漸近類全体の集合により理想境界  $\partial S_1^3$  を定義すると, これは  $S^2$  に同相な 2 つの連結成分に分かれる. そのうち未来 (過去) 向きの測地線から定まるものを  $\partial_+ S_1^3$  ( $\partial_- S_1^3$ ) と表すことにすると, これらにはリーマン球面と双正則な複素構造を与えることがわかる. これらを同一視することにより 2 対 1 の写像  $\pi: \partial S_1^3 \rightarrow C \cup \{\infty\}$  が得られる. いま, CMC-1 面  $f$  に対して単位法線ベクトル場  $\nu$  をとり, 点  $p \in M$  に対して時間的単位ベクトル  $\nu(p)$  を初速度とする測地線  $\gamma_{\nu(p)}(t)$  の漸近類  $[\gamma_{\nu(p)}] \in \partial S_1^3$  を与える写像を考えると, その  $\pi$  による像は,  $f$  の正則持ち上げ  $F$  から (2.1) で定まる双曲的ガウス写像に一致する ([6, Section 4]).

一方, CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  の誘導計量  $ds^2$  とガウス曲率  $K$  に対して  $d\sigma^2 := K ds^2$  は  $f$  がはめ込みを与え (すなわち特異点ではなく) かつ臍点でないような  $M$  の部分集合上で定曲率  $-1$  の計量を与える. とくに, この計量は  $f$  の正則持ち上げ  $F$  から定まる第二ガウス写像  $g$  を用いて

$$(2.4) \quad d\sigma^2 = \frac{4 dg d\bar{g}}{(1 - |g|^2)^2}$$

と書くことができる. ここで

- CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  の特異点集合は  $\Sigma_f := \{p \in M; |g| = 1\}$  で与えられる ([6, Theorem 1.1]).
- CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  の正則点集合  $M \setminus \Sigma_f$  上で,  $d\sigma^2$  は写像  $g$  による双曲計量

$$ds_H^2 = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} \quad \text{on} \quad C \cup \{\infty\} \setminus \{z \in C; |z| = 1\}$$

の引き戻しである.

### 3 完備性とエンドの性質

#### 3.1 完備性

大域的な性質を論じるために、特異点をもつ曲面の完備性の概念が必要となる：

**定義 1** ([6, Definition 1.2], [17, Definition 1]). 2次元多様体  $M$  から 3次元リーマン多様体  $(N, h)$  へのなめらかな写像  $f: M \rightarrow N$  が**完備**である、とは、 $M$  上の対称 2 テンソル  $T$  で、コンパクト集合  $C \subset M$  のそとでは恒等的に 0 となり、 $ds^2 + T$  が  $M$  上の完備なリーマン計量となるものが存在することである。ただし  $ds^2 = f^*h$  は  $N$  の計量の  $f$  による引き戻しである。

とくに、 $f$  が完備ならば、コンパクト集合の外で  $f$  ははめ込みを与えているので  $f$  の特異点集合はコンパクトとなる。

一方、CMC-1 面の場合、その正則リフトを用いて完備性の概念が定義できる：

**事実 2.** CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  の正則持ち上げを  $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  とする。複素多様体  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の標準的なエルミート計量の  $F$  による引き戻し  $ds_{\#}^2$  は  $M$  上のリーマン計量である。これを  $f$  のリフト計量 lift metric とよぶ。

実際、リフト計量は (4.2) (cf. [6, Remark 1.11]) のように表される。

**定義 3** ([6, Definition 1.3]). CMC-1 面  $f$  が**弱完備** weakly complete であるとは、そのリフト計量が完備リーマン計量を与えることである。

これら、完備性と弱完備性の間には次のような関係がある。

**定理 4** ([17]). CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  が完備であるための必要十分条件は  $f$  が弱完備で、その特異点集合はコンパクト、かつ  $M$  がコンパクト・リーマン面から有限個の点を取り除いたものと双正則同値となることである。

定理 4 の点  $p_1, \dots, p_n$  を  $f$  の**エンド**という。

完備 CMC-1 面  $f: \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow S_1^3$  のエンド  $p_j$  に注目すると、完備性から  $p_j$  の近傍で  $f$  は特異点を持たない。ここで特異点集合は  $\{|g| = 1\}$  と表されるから、エンドの近傍で  $|g| > 1$  か  $|g| < 1$  のいずれかが成り立つ。 $|g| - 1$  の符号は、エンドの挙動に関係がある：

**定理 5** ([6, Proposition 4.2]). コンパクト・リーマン面  $\overline{M}$  から有限個の点を取り去ったリーマン面  $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  上で定義された完備 CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  のエンド  $p_j$  の近傍で第二ガウス写像  $g$  が  $|g| < 1$  ( $|g| > 1$ ) を満たしているならば、 $p_j$  の近傍で  $f$  の像は  $\partial_+ S_1^3$  ( $\partial_- S_1^3$ ) に近づく。

#### 3.2 エンドの性質

以下、 $f: M \rightarrow S_1^3$  を CMC-1 面、 $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  を  $f$  の正則持ち上げとする。ただし  $\widetilde{M}$  は  $M$  の普遍被覆である。

持ち上げ  $F$  は一般に  $\widetilde{M}$  上で定義され、 $M$  上 1 価とは限らないが、

$$f = \pi_S(F) = Fe_3F^* \quad \left( e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

は  $M$  上で定義されている ((1.1) 参照). このことから、 $\tau \in \pi_1(M)$  を  $\widetilde{M}$  上の被覆変換とみなすとき

$$F \circ \tau = F\rho_F(\tau), \quad \rho_F(\tau) \in \mathrm{SU}(1, 1) = \{a \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}); ae_3a^* = e_3\}$$

となる  $\rho_F(\tau)$  が存在する. このようにして、正則リフト  $F$  に付随する  $\mathrm{SU}(1, 1)$  表現

$$\rho_F: \pi_1(M) \longrightarrow \mathrm{SU}(1, 1)$$

が得られる.

以下、 $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  ( $\overline{M}$  をコンパクト・リーマン面) とする. このとき、各エンド  $p_j$  のまわりを回るループ  $\tau_j$  に対応する  $\widetilde{M}$  の被覆変換  $\tau_j$  に対して  $\rho_F(\tau_j) \in \mathrm{SU}(1, 1)$  が定まる. これをエンド  $p_j$  の周期行列という. ここで  $\mathrm{SU}(1, 1)$  は  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  と同型で、これは双曲平面の等長変換群  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$  の二重被覆であることに注意すれば、 $\mathrm{SU}(1, 1)$  の元は楕円型、放物型、双曲型の 3 種類に分類される.

**定義 6.** CMC-1 面  $f: \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow S_1^3$  のエンド  $p_j$  の周期行列  $\rho_F(\tau_j)$  が楕円型 (放物型, 双曲型) であるとき、 $p_j$  を楕円型 (放物型, 双曲型) という.

すると、次がなりたつ:

**定理 7** ([6, Theorem 3.1]). 完備 CMC-1 面のエンドは楕円型か放物型である.

## 4 例

CMC-1 面  $f: M \rightarrow S_1^3$  の正則持ち上げを  $F$ 、双曲的ガウス写像を  $G$ 、第二ガウス写像を  $g$  とするとき、誘導計量  $ds^2$  と第二基本形式  $II$  は

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \omega \bar{\omega}, \quad II = Q + \bar{Q} + ds^2, \quad \omega = \frac{Q}{dg}$$

とかける. ただし  $Q$  は  $M$  上の正則 2 次微分で  $f$  の Hopf 微分とよばれる. これらを用いると

$$(4.1) \quad dF F^{-1} = \begin{pmatrix} G & -G^2 \\ 1 & -G \end{pmatrix} \frac{Q}{dG}$$

が成り立つことがわかる. このとき、 $f$  のリフト計量  $ds_{\#}^2$  は

$$(4.2) \quad ds_{\#}^2 = (1 + |G|^2)^2 \left| \frac{Q}{dG} \right|^2$$

と表すことができる.

ここで、正則データ  $(G, Q)$  から CMC-1 面を構成する方法を与える: リーマン面  $M$  上の有理型関数  $G$  と正則 2 次微分  $Q$  に対して (4.2) で与えられる計量が正定値であるとする. このとき、(4.1) を満たす  $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$  が存在する. とくに任意の  $\tau \in \pi_1(M)$  に対して  $F \circ \tau = F\rho_F(\tau)$  を満たす表現  $\rho_F: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$  が  $\mathrm{SU}(1, 1)$  に値をもつように  $F$  を選ぶことができれば、 $f = \pi_S \circ F: M \rightarrow S_1^3$  は  $M$  上で定義された CMC-1 面を与える. 逆に任意の CMC-1 面はこのようにして得られる (cf. [6, 7]).

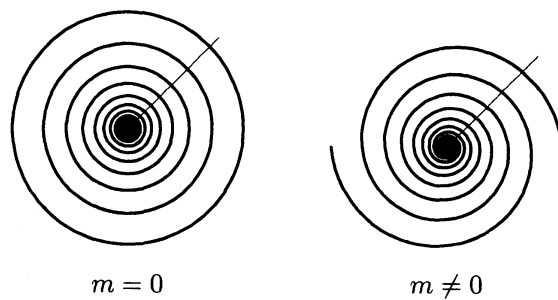


図1 双曲的カテナイドの特異点集合

#### 4.1 カテナイド

この節では,  $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (球面から2点を除いたもの),

$$G = z, \quad Q = \frac{\lambda dz^2}{z^2} \quad (\lambda \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$

とおき, 定数  $\beta$  を

$$(4.3) \quad \frac{1 - \beta^2}{4} = \lambda, \quad \operatorname{Re} \beta \geq 0$$

を満たすものとする. すると (4.2) であたえられる  $ds_{\#}^2$  は  $M$  上完備なリーマン計量を与える.

■**楕円的カテナイド** 定数  $\lambda$  が実数で  $\lambda < 1/4$  を満たしているとする. このとき (4.3) の  $\beta$  は正の実数を与える. いま

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - \beta & 1 - \beta \\ 1 - \beta & -1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & z^{\beta/2} \end{pmatrix}$$

とすると, これは (4.1) をみだし, 原点のまわりを反時計回りに一回りするループに対応する  $\widetilde{M}$  の被覆変換  $\tau$  に対して

$$F \circ \tau = F \rho_F(\tau) \quad \rho_F(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\pi i \beta} & 0 \\ 0 & e^{\pi i \beta} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1, 1)$$

となるので,  $\pi_S \circ F$  は  $M$  上で定義された弱完備な CMC-1 面である. さらに

$$g = z^\beta$$

となるから, 特異点集合は  $|z| = 1$  となるので定理 4 から  $f$  は完備である. このような  $f$  を**楕円的カテナイド**とよぶ. これは双曲空間のカテナイド・カズン ([2, 16]) の対応物とみなすことができる.

■**双曲的カテナイド** 式 (4.3) の  $\beta$  が

$$\beta = m + i\mu \quad (m \text{ は負でない整数, } \mu \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

の形をしているとする. すると,

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - \beta & 1 - \beta \\ 1 - \beta & -1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & z^{\beta/2} \end{pmatrix} R, \quad R = \sqrt{\frac{i}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

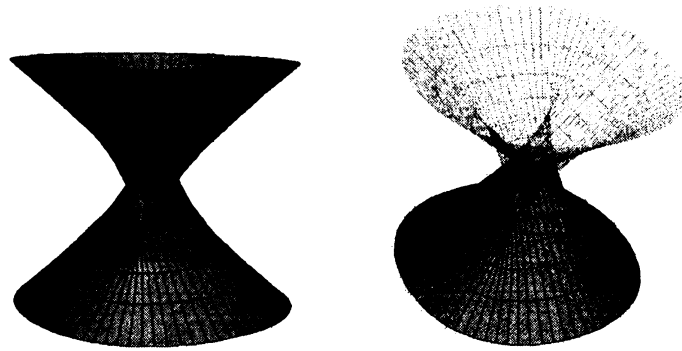


図2 種数1で2つのエンドをもつ極大面

とおくと, これは (4.1) を満たし,

$$f = Fe_3F^* = \frac{-1}{|\beta|} \begin{pmatrix} r(\mu \cos \varphi - \frac{1}{2}(1 - |\beta|^2) \sin \varphi) & e^{i\theta} (\frac{1}{2} \sin \varphi (1 + |\beta|^2) - \frac{i}{2} \cos \varphi) \\ e^{-i\theta} (\frac{1}{2} \sin \varphi (1 + |\beta|^2) + \frac{i}{2} \cos \varphi) & \frac{1}{r} (-\mu \cos \varphi - \frac{1}{2}(1 - |\beta|^2) \sin \varphi) \end{pmatrix}$$

は  $M$  上で定義される. ただし

$$z = re^{i\theta}, \quad \varphi = m\theta + \mu \log r$$

とおいた. 特異点集合は

$$\Sigma_f = \{\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}\} = \{z = re^{i\theta}; \mu \log r + m\theta \equiv 0 \pmod{\pi}\}$$

となり, これはエンドに集積する (図1) ので,  $f$  は完備ではない. このようにして得られた  $f$  を双曲的カテナノイドという.

■放物的カテナノイド 式 (4.3) の  $\beta$  が 0, すなわち  $\lambda = 1/4$  のとき,

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \log z - 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \log z - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{\pi i/4} \end{pmatrix} R, \quad R = \sqrt{\frac{i}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

とすると  $F$  は (4.1) を満たし,

$$f = \pi_S \circ F = Fe_3F^* = \begin{pmatrix} r(-\frac{1}{2} \log r + 1) & \frac{1}{2} e^{i\theta} \log r \\ \frac{1}{2} e^{-i\theta} \log r & \frac{1}{r} (-\frac{1}{2} \log r - 1) \end{pmatrix}$$

は  $M$  上で定義された CMC-1 面を与える. ただし  $z = re^{i\theta}$  とおいた. 特異点集合は  $\{|z| = 1\}$  となり, コンパクトとなるので, 得られた CMC-1 面は完備である. この  $f$  を放物的カテナノイドとよぶ.

## 4.2 種数の高い例

3次元ユークリッド空間の, 2つのエンドをもつ完備な極小曲面で各々のエンドが自己交差をもたないものはカテナノイドに限る [14]. 一方, 3次元 Minkowski 空間の極大面には, 二つの, 自己交差をもたないエンドをもつ種数1の曲面が存在する (Kim-Yang [11], 図2). この曲面を含む極大面の系列で, 任意に大きい種数をもつものが構成できる ([7]). ただし, 種数が2以上の場合, 各々のエンドは自己交差をもつ.

これらの極大面に対応する CMC-1 面を, Minkowski 空間を de Sitter 空間に変形することにより構成することができる ([7]). これは, ユークリッド空間の極小曲面を双曲空間の CMC-1 曲面に変形する [13] の方法に類似なものであるが, 周期問題を解くためにより精密な議論が必要とされる.



## 参考文献

- [1] R. Aiyama and K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in  $H^3(-c^2)$  and  $S_1^3(c^2)$* , Ann. Global Anal. Geom. (1), **17** (1998), 49–75.
- [2] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque, **154–155** (1987), 321–347.
- [3] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math., **15** (1970), 223–230.
- [4] S. Fujimori, *Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-Space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 289–320.
- [5] S. Fujimori, *Spacelike mean curvature 1 surfaces of genus 1 with two ends in de Sitter 3-space*, Kyushu Journal of Math., **61** (2007) 1–20.
- [6] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space*, Comm. Anal. Geom., **17** (2009) 387–423.
- [7] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Results in Math., **56** (2009) 41–82.
- [8] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008) 827–848.
- [9] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.
- [10] O. Kobayashi, *Maximal surfaces with conelike singularities*, J. Math. Soc. Japan, **36** (1984), 609–617.
- [11] Y. W. Kim and S.-D. Yang, *A family of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 3379–3390.
- [12] S. Lee and S.-D. Yang, *Spacelike constant mean curvature 1 trinoids in de Sitter three-space*, Osaka J. Math., **43** (2006), 641–663.
- [13] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Irreducible constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic space with positive genus*, Tôhoku Math. J., **49** (1997), 449–484.
- [14] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differential Geometry, **18** (1983), 791–809.
- [15] M. Umehara and K. Yamada, *Comoplete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.
- [16] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 13–40.
- [17] M. Umehara and K. Yamada, *Applications of a completeness lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces*, preprint, arXiv:0909.1128; to appear in the Bulletin of the London Mathematical Society.